Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 8

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Sei α eine Nullstelle des irreduziblen Polynomes $x^3 - x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Bestimmen Sie alle Primzahlen, welche in dem Zahlring $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ von $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ verzweigen.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Wir setzen die vorherige Aufgabe fort. Bestimmen Sie nun für alle verzweigenden Primzahlen p die Form der Primidealzerlegung von (p) in $\mathcal{O}_K$. Damit ist gemeint, dass Sie nicht die Primidealzerlegung ausrechnen müssen, sondern nur herausfinden sollen, wie viele Faktoren mit welchen Exponenten dort auftreten.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Wir haben gesehen, dass gebrochene Ideale in Dedekindringen stets invertierbar sind. Zeigen Sie, dass die im Allgemeinen nicht der Fall ist, indem Sie den Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ und das Ideal $I = (2, 1 + \sqrt{5}) \subseteq R$ betrachten.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Wir betrachten die Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-23}) \subseteq \mathbb{Q}(\omega) = L$, wobei $\omega = e^{\frac{2\pi i}{23}}$ eine primitive 23-te Einheitswurzel ist. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Zahlringes $\mathcal{O}_K$ von K mit $2 \in \mathfrak{p}$ und sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathbb{Z}[\omega]$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$.

(i) Zeigen Sie, dass das Ideal $\mathfrak{p}$ kein Hauptideal ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Idealpotenz $\mathfrak{p}^3$ ein Hauptideal ist.

(iii) Rechnen Sie nach, dass der Trägheitsgrad $f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{q}$ über $\mathfrak{p}$ durch 11 gegeben ist.

(iv) Nehmen Sie an, dass $\mathfrak{q} = (a)$ ein Hauptideal ist und folgern Sie, dass $\mathfrak{p}^{11} = (N(a))$ ist.

(v) Schliessen Sie daraus, dass $\mathfrak{p}$ dann auch ein Hauptideal sein muss, sodass obige Annahme falsch gewesen sein muss und $\mathfrak{q}$ somit auch kein Hauptideal sein kann.